25/5/20

Θεώρημα: Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα. Τότε, υπάρχουν μη μηδενικές κυκλικές υποομάδες $G_1, \dots, G_r, \dots, G_{r+u}$, $r, u \geq 0$

i) $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_r \oplus \dots \oplus G_{r+u}$

ii) για $i = 1, \dots, r$ οι G_i πεπερ. με $|G_i| = p_i^{n_i}$, p_i πρώτος

iii) για $j = r+1, \dots, r+u$ οι G_j άπειρες κυκλικές

και όλα τα $r, u, i, j, p_i^{n_i}$ καθορίζονται μονοσήμαντα

Πόρισμα: Έστω G μια πεπερ. παραγόμενη αβελιανή ομάδα

$$G \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_r^{n_r}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{u\text{-φορές}}$$

$\mathbb{Z}^u$

*αν η G πεπερασμένη με τάξη k

$k = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$: $G \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_r^{a_r}}$

Εφαρμογή Θεωρήματος Δομής II

→ Αβελιανές ομάδες τάξης 24

$|G| = 24 \Rightarrow$ πεπερασμένη $\Rightarrow u = 0$ (δεν έχω $\mathbb{Z}$)

$24 = 2^3 \cdot 3$

Από Θεωρ Δομής I

$d_1 | d_2 | \dots | d_s$ και $d_1 \dots d_s = 24$

$2|2|6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$

$2|12 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$

$24 \rightarrow \mathbb{Z}_{24}$

$2^3 \cdot 3$
- $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$
- $2 \cdot 2^2 \cdot 3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$
- $2^3 \cdot 3 \rightarrow \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3$

→ Αβελιανές ομάδες τάξης 1000

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$1000 = 2^3 \cdot 5^3$

$2^3 \cdot 5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{125}$

$2 \cdot 2^2 \cdot 5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{5^3}$

$2 \cdot 2 \cdot 2\, 5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{5^3}$

$2^3 \cdot 5 \cdot 5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{5^2}$

$2 \cdot 2^2\, 5 \cdot 5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{5^2}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5\, 5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{5^2}$

$2^3\, 5 \cdot 5 \cdot 5 \rightarrow \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$

$2 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$

(Συνέχεια) Ασκήσεις

$\mathbb{K}$ σώμα, M ένας $\mathbb{K}[x]$ μόδιος, $\operatorname{Ann} M = \langle x^3(x-1) \rangle$

$\dim_{\mathbb{K}} M = 6$

Από Θεωρ δομής I

$$M \simeq \begin{cases} \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x(x-1)\rangle} \oplus \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle} & (A) \\[2ex] \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^2\rangle} \oplus \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle} & (B) \\[2ex] \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x\rangle} \oplus \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x\rangle} \oplus \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle} & (\Gamma) \\[2ex] \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x-1\rangle} \oplus \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x-1\rangle} \oplus \dfrac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle} & (\Delta) \end{cases}$$

Λήμμα: Έστω R ΠΚΙ και M κυκλικό R-μόδιο με $\operatorname{Ann} M = \langle d \rangle$

Αν $d = r \cdot s$, όπου $\mu\kappa\delta(r,s) = 1$

$\Rightarrow \exists$ κυκλικοί υπομόδιοι $A, B \leq M$ με $M = A \oplus B$

και $\operatorname{Ann} A = \langle r \rangle$, $\operatorname{Ann} B = \langle s \rangle$

(A) $$\frac{\mathbb{K}[x]}{\langle \underbrace{x}_{r}\underbrace{(x-1)}_{s}\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3(x-1)\rangle} \simeq \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x-1\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x-1\rangle}$$

$$\simeq \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x^3\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x-1\rangle} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle x-1\rangle}$$